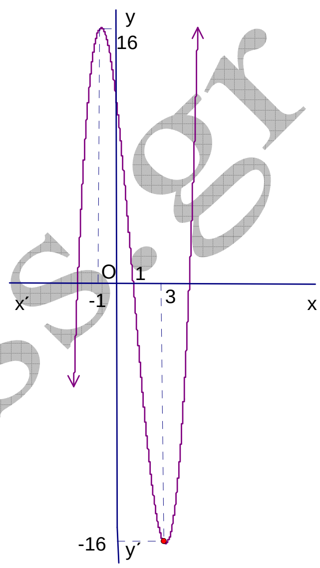
2.10
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 290

Α΄ Ομάδας

1.i)

Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$

Λύση



$D_f = \mathbb{R}$, f συνεχής σαν πολυωνυμική

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 6x - 9 = 0 \iff x = -1$ ή $x = 3$

$f'(x) > 0 \iff 3x^2 - 6x - 9 > 0 \iff x < -1$ ή $x > 3$

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) = 0 \iff 6x - 6 = 0 \iff x = 1$

$f''(x) > 0 \iff 6x - 6 > 0 \iff x > 1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^3 - 3x^2 - 9x + 11) = \lim_{x\to+\infty}(x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3 - 3x^2 - 9x + 11) = \lim_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$$

Η C_f έχει ασύμπτωτες αφού η f είναι πολυωνυμική βαθμού ≥ 2

Πίνακας προσήμου και μεταβολών

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
f'		+	0	−		−	0	+	
f''		−		−	0	+		+	
f									
			τ.μέγ		σ.κ		τ.ελ		

$f(-1) = 16$ $f(1) = 0$ $f(3) = -16$

1.ii)

Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Λύση

$D_f = (-\infty,\ 1) \cup (1,\ +\infty)$, f συνεχής σαν ρητή

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0 \quad \text{για κάθε } x \in D_f$$

$$f''(x) = \frac{4(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3} \neq 0$$

$$f''(x) > 0 \iff x - 1 > 0 \iff x > 1$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1 \Rightarrow$ η ευθεία $y = 1$ είναι ορ.ασύμπτωτη στο $+\infty$

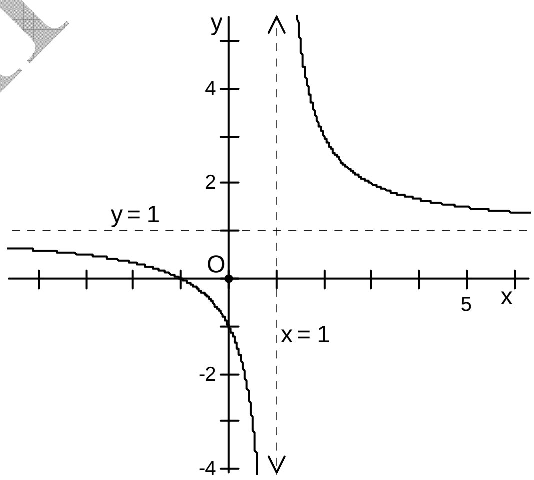
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x} = 1 \Rightarrow$ η ευθεία $y = 1$ είναι ορ.ασύμπτωτη στο $-\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = \left(\dfrac{2}{0^+}\right) = +\infty \Rightarrow$ η ευθεία $x = 1$ είναι κατ. ασύμπτωτη

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x+1}{x-1} = \left(\dfrac{2}{0^-}\right) = -\infty$

Πίνακας προσήμου και μεταβολών

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$-$	‖	$-$
f''	$-$	‖	$+$
f		‖	



1.iii)

Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2$

Λύση

$D_f = \mathbb{R}$, f συνεχής σαν πολυωνυμική

$f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -1$ ή $x = 1$

$f''(x) = 12x^2 - 4$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ή $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

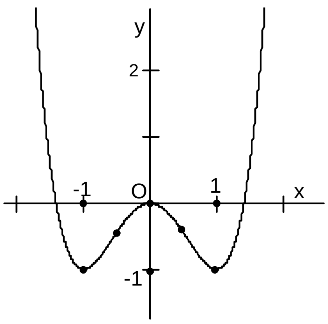
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^4 - 2x^2) = \lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^4 - 2x^2) = \lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$$

Πίνακας προσήμου και μεταβολών

x	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$+\infty$
f′		−	0	+	|	+	0	−	|	−	0	+	
f′′		+	|	+	0	−	|	−	0	+	|	+	
f													
			τ.ελ		σ.κ		τ.μέγ		σ.κ		τ.ελ		

$f(-1) = -1$, $f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\dfrac{5}{9}$, $f(0) = 0$, $f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\dfrac{5}{9}$, $f(1) = -1$



2.i)

Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

Λύση

$D_f = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$, f συνεχής σαν ρητή

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$f'(x) = 0 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x = -1$ ή $x = 1$

$f'(x) > 0 \iff x^2 - 1 > 0 \iff x < -1$ ή $x > 1$

$$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)' = 0 + \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3} \neq 0$$

$f''(x) > 0 \iff x^3 > 0 \iff x > 0$

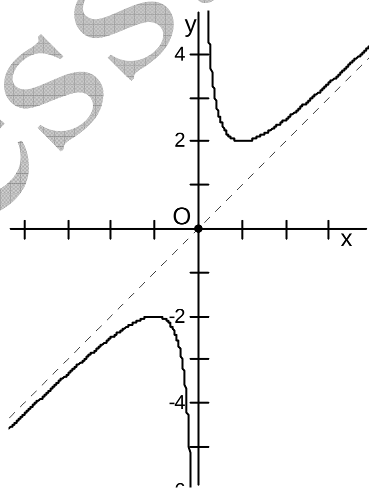
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{1}{x}\right) = (+\infty) + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x + \frac{1}{x}\right) = (-\infty) + 0 = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 + (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 + (-\infty) = -\infty$$

Άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατ. ασύμπτωτη



$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - \lambda x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Επομένως η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Πίνακας προσήμου και μεταβολών

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		+	0	−	‖	−	0	+	
f''		−		−	‖	+		+	
f					‖				
			τ.μέγ				τ.ελ		
			$f(-1) = -2$				$f(1) = 2$		

2.ii)

Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x-1}$

Λύση

$D_f = (-\infty,\ 1) \cup (1,\ +\infty)$, f συνεχής σαν ρητή

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x-2)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2-2x-x+1-x^2+x+2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2} > 0 \quad \text{αφού} \quad \Delta = 4-12 = -8 < 0$$

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x+3)2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{2(x-1)[(x-1)^2-(x^2-2x+3)]}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{2(x-1)[x^2-2x+1-x^2+2x-3]}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{2(x-1)(-2)}{(x-1)^4} = \frac{-4}{(x-1)^3} \neq 0$$

$f''(x) > 0 \iff x-1<0 \iff x<1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-2}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-2}{x-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\frac{x^2-x-2}{x-1} = \left(\frac{-2}{0^+}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\frac{x^2-x-2}{x-1} = \left(\frac{-2}{0^-}\right) = +\infty$$

Άρα η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-2}{x^2-x} = 1$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x-2}{x-1}-x\right)$$

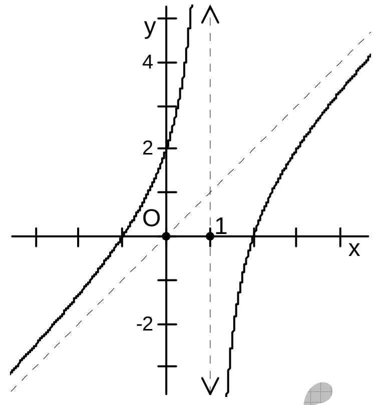
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-2-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{x-1} = 0$$

Επομένως η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Ομοίως, η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$

Πίνακας προσήμου και μεταβολών

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f΄		+	‖	+	
f΄΄		+	‖	−	
f			‖		



3.

Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση
$f(x) = x + ημx$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$

Λύση

Η f είναι συνεχής σαν άθροισμα συνεχών

$f΄(x) = 1 + συνx$

$f΄(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + συνx = 0 \Leftrightarrow συνx = -1 \Leftrightarrow x = -\pi$ ή $x = \pi$

$f΄(x) > 0 \Leftrightarrow 1 + συνx > 0 \Leftrightarrow συνx > -1 \Leftrightarrow -\pi < x < \pi$

$f΄΄(x) = -ημx$

$f΄΄(x) = 0 \Leftrightarrow ημx = 0 \Leftrightarrow x = -\pi$ ή $x = 0$ ή $x = \pi$

$f΄΄(x) > 0 \Leftrightarrow ημx < 0 \Leftrightarrow -\pi < x < \pi$

$f(-\pi) = -\pi$

$f(\pi) = \pi$

Πίνακας προσήμου και μεταβολών

x	$-\pi$		0		π
f΄	0	+		+	0
f΄΄	0	+	0	−	0
f					

ελ.	σ.κ	μέγ
$f(-\pi) = -\pi$	$f(0) = 0$	$f(\pi) = \pi$